Technische Universität Berlin
Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Dipl.-Ing. S. Kusche
www.reibungsphysik.de

Numerische Simulationsverfahren im Ingenieurwesen

Hausaufgabe 4

Abgabe

Die 4. Hausaufgabe ist bis zum 16.12.2014 abzugeben. Es steht euch frei, zwischen diesem und dem nächsten Aufgabenblatt zu wählen. Um den Einstieg in diese Hausaufgabe zu erleichtern, gibt es Videotutorials auf der Webseite.

Einleitung zu Formfaktoren

Zu untersuchen ist der Wärmeübergang zwischen zwei isothermen Körpern, die in eine Richtung z sehr ausgedehnt seien. Dadurch reduziert sich das Problem auf ein 2-dimensionales, relevante Größen sind auf die Ausdehnung ℓ in z Richtung bezogen zu betrachten. Nehmen wir weiterhin ein quellfreies Gebiet zwischen den isothermen Körpern an, so folgt die Wärmeleitungsgleichung (Laplace-Gleichung):

$$\Delta\vartheta = 0 \qquad \text{mit} \qquad \vartheta = \vartheta(x, y) \tag{1}$$

Bei gegebenen Randwerten $\vartheta_i = const$ (isotherm) auf Γ_i (Dirichlet-Randbedingung) kann mithilfe der REM der Fluß in Normalenrichtung q auf dem Rand berechnet werden.

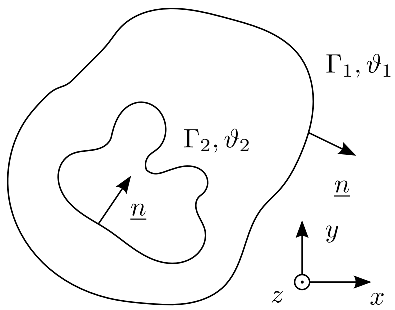

Abbildung 1: Ebene Anordnung

$$q = \underline{q} \cdot \underline{n} = -\lambda \nabla\vartheta \cdot \underline{n} \tag{2}$$

Der Wärmestrom pro Längeneinheit (bezogen auf ℓ) zwischen den Körpern berechnet sich zu:

$$\dot{Q}_\ell = -\oint_{\Gamma_2} q ds = \oint_{\Gamma_1} q ds \tag{3}$$

Aufgrund der Linearität des Laplaceoperators ist der Wärmestrom proportional der Temperaturdifferenz. Bezieht man diese aufeinander und teilt durch die Wärmeleitfähigkeit λ, so erhält man eine rein geometrische Größe, den Formfaktor S_ℓ (λ fällt raus, wenn man bedenkt, dass es sich mit dem λ aus dem Gesetz von Fourier kürzt):

$$S_\ell = \frac{1}{\lambda} \frac{\dot{Q}}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \tag{4}$$

a) Referenzlösung der Laplacegleichung

Implementiere eine nicht triviale Lösung der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ auf dem Gebiet $[0, 1]^2$ als Funktion **[u qx qy]=laplacenull(x)**. Eingabewert sei eine Matrix x mit Koordinaten (erster Index Richtung, zweiter Index laufende Nummer).

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_i & \dots & y_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ausgabewerte sind das Potenzial u und die Komponenten des Gradienten q_x und q_y. Also 3 Zeilenvektoren der Länge n.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_i & \dots & u_n \end{bmatrix} \qquad u_i = u(x_i, y_i) \tag{6}$$

$$qx = \begin{bmatrix} q_{x1} & q_{x2} & q_{x3} & \dots & q_{xi} & \dots & q_{xn} \end{bmatrix} \qquad q_{xi} = q_x(x_i, y_i) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_i, y_i} \tag{7}$$

$$qy = \begin{bmatrix} q_{y1} & q_{y2} & q_{y3} & \dots & q_{yi} & \dots & q_{yn} \end{bmatrix} \qquad q_{yi} = q_y(x_i, y_i) = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_i, y_i} \tag{8}$$

b) Berechnung der Einflussmatritzen

Durch Anwendung der Kollokationsmethode entsteht das folgende Gleichungsystem für K Potenziale u_k und Flüsse q_k in den Randknoten:

$$Hu = Gq - b \qquad \text{mit} \qquad u = (u_k), q = (q_k) \tag{9}$$

und den Einflussmatritzen

$$H = (h_{kl}) \qquad \text{mit} \qquad h_{kl} = h_{j\beta i\alpha} = \int_{\Gamma_i} q^*(\underline{x} - \underline{x}_{j\beta})\phi_\alpha(\underline{x})d\gamma + c_{j\beta} \tag{10}$$

$$G = (g_{kl}) \qquad \text{mit} \qquad g_{kl} = g_{j\beta i\alpha} = \int_{\Gamma_i} u^*(\underline{x} - \underline{x}_{j\beta})\phi_\alpha(\underline{x})d\gamma \qquad \text{mit} \qquad k, l = 1...K \tag{11}$$

Die Randkurve wird zwecks Interpolation in Ortselemente Γ_o mit der Koordinate $s \in [-1, +1]$ unterteilt. Diese unterteilen sich nun weiter in Elemente Γ_i mit den Koordinaten $a \in [-1, +1]$. Betrachten wir nun zunächst das Ortselement. Die Interpolation des Ortsvektors $\underline{x}$ mittels Ansatzfunktionen für kontinuierliche Elemente lautet:

$$\text{Auf } \Gamma_o: \ \underline{x} = \underline{x}(s) = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \underline{x}_{o\alpha}\phi_\alpha(s) \qquad \Rightarrow \qquad d\gamma = |d\underline{x}(s)| = \underbrace{\left|\sum_{\alpha=1}^{n+1} \underline{x}_{o\alpha}\phi'_\alpha(s)\right|}_{t(s)} ds \tag{12}$$

Um auf ein Element Γ_i (mit den Koordinaten $a \in [-1, +1]$) zu kommen wird eine (lineare) Abbildung zwischen s und a gebraucht. Das geht wie folgt:

$$\Gamma_i \in \Gamma_o \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c} a = -1 \leftrightarrow s = s_1 \\ a = +1 \leftrightarrow s = s_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} s(a) = s_1(1-a)/2 + s_2(1+a)/2 \\ a(s) = (2s - s_1 - s_2)/(s_2 - s_1) \end{array} \tag{13}$$

Zusammen ergibt sich für das Integral:

$$\int_{\Gamma_i} (.)d\gamma = \int_{s_1}^{s_2} (.)t(s)ds = \frac{s_2 - s_1}{2} \int_{-1}^{+1} (.)t(s(a))da \tag{14}$$

Im Rahmencode ist bereits eine Struktur hinterlegt, in der die Abhängigkeit von a berücksichtigt wurde: Ortsvektor $\underline{x}(a)$, Wegelement $d\underline{x}(a)$ sowie Normaleneinheitsvektor $\underline{n}(a)$. Aufgerufen werden die Funktionen mit:

```
ele_a2x{i}(a) % Ortsvektor x(a)
ele_a2d{i}(a) % Wegelement dx(a)
ele_a2n{i}(a) % Normaleneinheitsvektor n(a)
```

Vervollständige nun die Berechnung der Matritzen in dem Programm **matrix**. Die Funktionen für die Fundamentallösung u^* bzw. q^* müssen dazu noch implementiert werden (2D). Achte bei der Berechnung der Integrale auf mögliche Singularitäten, die in den Knoten auftreten können. Plotte typische Beispiele für die zu integrierende Funktionen und dokumentiere deine Beobachtungen.

c) Lösung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem

$$Hu = Gq - b \qquad \text{mit} \qquad u = (u_k), q = (q_k) \tag{15}$$

ist nun zu lösen. Dabei ist zu beachten, dass entweder Potenzial (Dirichlet Randbedingung) oder Fluss (Neumann Randbegingung) vorgeben sind. Diese Größen tauchen noch auf beiden Seiten auf. Sortiere das Gleichungssystem vor dem Invertieren um, so dass nur noch Unbekannte auf der linken Seite stehen. Vervollständige dazu den Rahmencode **loesen**. Teste nun dein Randelementeprogramm für verschiedene Ansatzfunktionen, Diskretisierungen etc. unter Verwendung einer geeigneten Referenzlösung. Welche Parameter beeinflussen die Güte der Lösung stark? Überprüfe dabei auch die Bilanz des Flusses, der in einem quellfreien Gebiet integriert über den Rand verschwinden muss.

d) Formfaktoren für beliebige ebene Anordnungen

Für einfache geometrische Formen ist S_ℓ analytisch berechenbar. So erhält man für einen Zylinder mit Radius r_1 der um e von der Mittelachse verschoben in einem größerem Zylinder mit Radius $r_2 > e + r_1$ liegt:

$$S_\ell = \frac{2\pi}{\operatorname{arcosh}(x)} \tag{16}$$

$$x = \frac{r_1^2 + r_2^2 - e^2}{2 r_1 r_2} \tag{17}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{18}$$

$$S_\ell\big|_{e=0} = 2\pi / \ln\left(r_2/r_1\right) \tag{19}$$

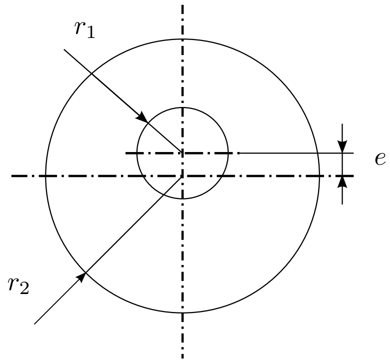

Abbildung 2: Kreis in Kreis

Schreibe ein Programm, dass die Eingabe zweier beliebiger Ränder erlaubt und anschließend den Formfaktor S_ℓ berechnet. Bei beliebigen Anordnungen überprüfe die Bilanzgleichung für den Wärmestrom und gib eine Warnung aus, wenn das Ergebnis nicht die Erwartungen erfüllt. Überprüfe ebenfalls den lokalen Fehler (Wärmestrom) bei Verwendung von diskontinuierlichen Elementen an sinnvollen Stellen.

Überprüfe die analytische Formel für den Kreis im Kreis. Folge dafür dem Videotutorial um das Programm auf Kreisförmige Konturen zu spezialisieren.

e) Formfaktoren für ineinanderliegende, regelmäßige Polygone

Betrachte den akademischen Fall von ineinanderliegenden regelmäßgen Polygonen. Für ein n-Eck in einem n-Eck erhält man die folgende Gleichung (Näherungslösung):

$$S_\ell = \frac{4\pi}{\ln(1+x)} \qquad \text{mit} \qquad x = \frac{\pi}{n}\,\frac{r_2^2/r_1^2 - 1}{\tan(\pi/n)} \tag{20}$$

und für den Spezialfall Quadrat in Quadrat:

$$S_\ell = 4\,\frac{1 + r_1/r_2}{1 - r_1/r_2} - \frac{8}{\pi}\ln(2) \qquad \text{für} \qquad \frac{1}{3} < \frac{r_1}{r_2} < 1 \tag{21}$$

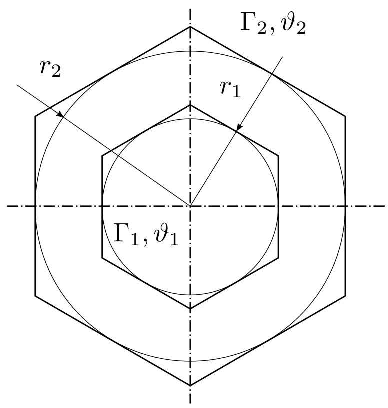

Abbildung 3: n-Eck in n-Eck

Schreibe nun ein Programm, dass den Formfaktor für ein n_1-Eck in einem n_2-Eck berechnet. Zur Konstruktion der Polygone kann die Formel für den Innenkreisradius r_i und Außenkreisradius r_a hilfreich sein:

$$r_i = r_a \cos(\pi/n) \tag{22}$$

Implementiere zusätzlich einen Fehlerschätzer indem du zum Einen die Bilanzgleichung des Wärmestromes überprüfst, zum Anderen durch Verwendung diskontinuierlicher Elemente auf glatten Kanten den Sprung im Wärmestrom untersuchst. Es ist im Rahmen der Hausaufgabe nicht nötig, eine Netzadaption zu implementieren. Vergleiche die Ergebnisse deines Programms für ausgewählte Fälle mit den gegebenen Formeln.

Studiere abschliessend, welche Abhängigkeit der Formfaktor S_ℓ von n_1 und n_2 aufweist. Dies kannst du für ein konstantes Verhältniss r_1/r_2 tun. Alternativ untersuche für ein festes Verhältnis $n_1/n_2 \neq 1$ die Abhängikeit von r_1 und r_2.

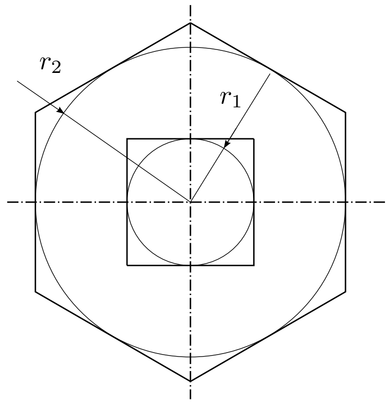

Abbildung 4: n_1-Eck in n_2-Eck